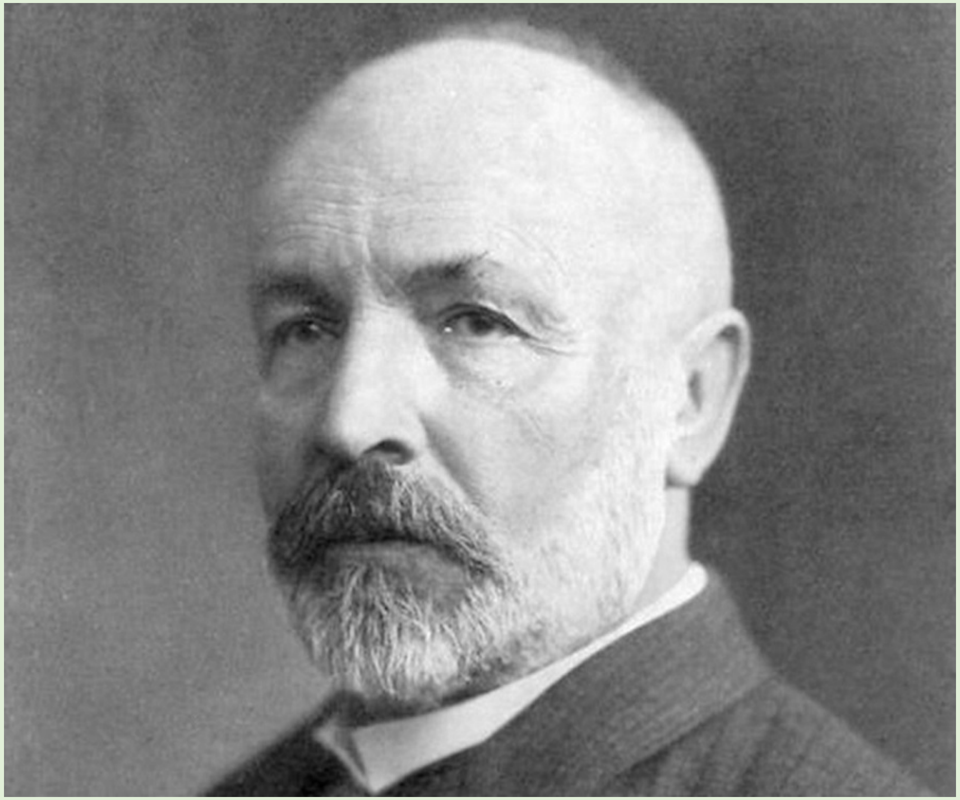
# Cantor: lo vedo ma non ci credo



Georg Cantor, 1845 - 1918

# Matematica e oltre

- Teoria degli insiemi
- Natura dell’infinito
- Aritmetica transfinita

## Critiche e controversie …

**Kronecker** (1823-1891): Cantor è un ciarlatano scientifico che corrompe le giovani menti

**Poincaré** (1854-1912): la teoria degli insiemi è una malattia patologica, da curare

## … ma anche entusiasmo

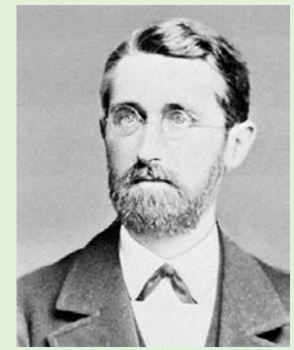
**Hilbert** (1862-1943): Cantor ha creato per noi un paradiso dal quale nessuno ci caccerà

**Russell** (1872-1970): la teoria degli insiemi è uno dei più alti risultati dell’attività spirituale dell’uomo

# Il titolo:
# lo vedo, ma non ci credo

Cantor a Dedekind, 29 giugno 1877

"Fintanto che non mi avrà approvato non posso che dire: *Je le vois, mais je ne le crois pas*"



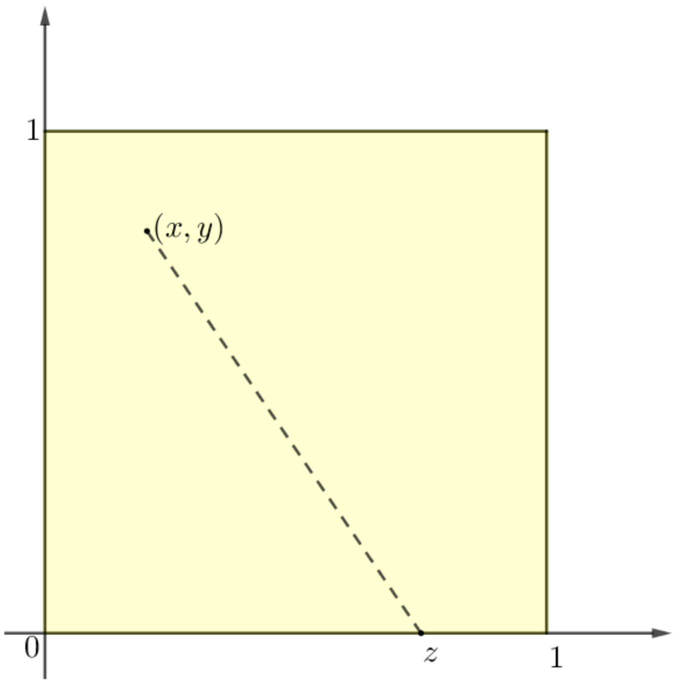
Richard Dedekind
(1831-1916)

(1878) "Un contributo alla teoria degli insiemi":

Equipotenza di un segmento e un quadrato

**R** equivale a $\mathbf{R}^n$: e la nozione di dimensione ?

# Equipotenza di un segmento e un quadrato




$$x = 0, a_1 a_2 \ldots . a_n \ldots .$$
$$y = 0, b_1 b_2 \ldots . b_n \ldots .$$
$$\sim \quad z = 0, a_1 b_1 a_2 b_2 \ldots . a_n b_n \ldots .$$

Ogni corrispondenza biunivoca fra due varietà di dimensione diversa è necessariamente discontinua

(Brouwer, 1911)

# Lo credo, ma non lo vedo (!?)

Ipotesi del continuo:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

Certezza razionale

(lo vedo)

$\Longleftrightarrow$

Convinzione intuitiva

(ci credo)

Lettera a Ignatius Jeiler (1888): "… non ho dubbi sulla verità dei transfiniti, che ho riconosciuto con l'aiuto di Dio …"

# Le date della vita

1845. Nasce a San Pietroburgo, il 3 marzo

1856. La famiglia si trasferisce in Germania (Wiesbaden poi Francoforte)

1862-67. Studia a Berlino con Weierstrass, Kronecker e Kummer

Dal 1869 all’università di Halle. Straordinario dal 1872, ordinario dal 1879, in pensione dal 1913

1874. Sposa Vally Guttmann (avrà sei figli)

1884. Prima manifestazione di depressione. Ricovero in clinica di nervi

1889. Fonda la Società Matematica Tedesca, di cui diventa il primo presidente

1891. Presiede il Primo congresso della Società Matematica Tedesca

1899. Secondo ricovero (ulteriori, frequenti, ricoveri fino al 1917)

1918. Muore nella clinica di malattie nervose di Halle

# Le origini della teoria degli insiemi

**Teorema** (1870): Se una funzione continua di variabile reale $f(x)$ è data da una serie trigonometrica convergente per ogni valore di $x$, allora non esistono altre serie dello stesso tipo che convergono per ogni valore di $x$ e rappresentano la funzione $f(x)$.

(1871-72) Generalizzazione del teorema di unicità agli insiemi infiniti di punti eccezionali

(1872) **I numeri irrazionali.** Classi di equivalenza di successioni fondamentali di numeri razionali $\{a_n\}$

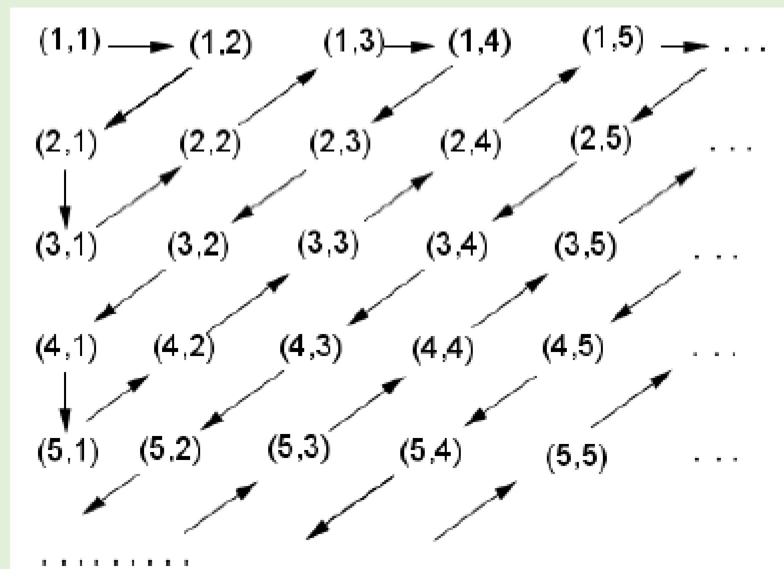
- Operazioni
- Assioma di completezza
- Consistenza logica = esistenza legittima in matematica

# Maturità della teoria degli insiemi

Un insieme è una collezione di oggetti definiti e distinti che può essere colto unitariamente dalla nostra mente e per il quale è possibile decidere quali gli appartengano e quali no

- La nozione di potenza

Numerabilità dei razionali



# Maturità della teoria degli insiemi

(1874) "Su una proprietà della collezione di tutti i numeri algebrici reali"

$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times \cdots$ è numerable se tutti gli $A_i$ lo sono

Una famiglia numerabile di insieme numerabili è ancora numerabile

L'insieme dei numeri algebrici è numerabile

Non numerabilità dell'insieme
dei numeri reali

$$x_1 = 0, a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} \ldots$$
$$x_2 = 0, a_{21} a_{22} \ldots a_{2n} \ldots$$
$$x_3 = 0, a_{31} a_{32} \ldots a_{3n} \ldots$$
$$\ldots \ldots$$

$b_i \neq a_{ii}$ $\qquad y = 0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$

# Maturità della teoria degli insiemi

Il primo numero trascendente (Liouville, 1844)

$$\sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!} = 0,110001000000000000000001000\ldots$$

(1883) "Fondamenti di una teoria generale degli insiemi"

- L’essenza della matematica sta nella sua libertà

- Matematica pura = matematica libera

# Aritmetica transfinita

$$|A| + |B| = |A \uplus B|$$
$$|A| \cdot |B| = |A \times B|$$
$$|A|^{|B|} = |A^B|$$

Le "contraddizioni dell'infinito"

$$\aleph_0 + n = \aleph_0$$
$$\aleph_0 \cdot n = \aleph_0$$

È difficile "sfuggire" al numerabile

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$
$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$$

# Ordinamento dei cardinali transfiniti

(1891) "Su una questione elementare della teoria degli insiemi"

$$|A| < |B|$$

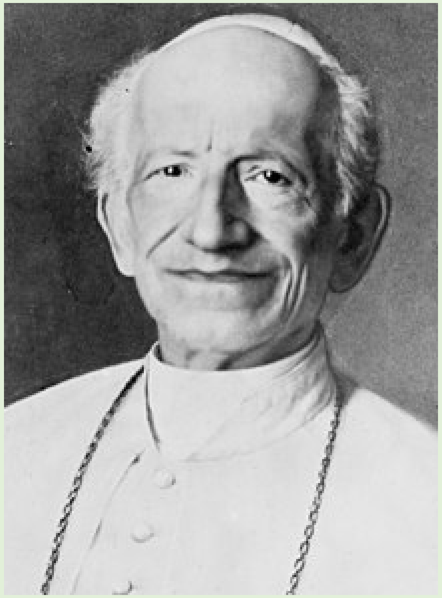
**Teorema** (Cantor, Bernstein, Schröder). Se $A$ è equivalente a $B' \subset B$ e $B$ è equivalente a $A' \subset A$ allora $A$ e $B$ sono equivalenti

**Teorema**. Esiste una applicazione iniettiva $A \to \mathcal{P}(A)$ mentre nessuna applicazione $f\colon\ A \to \mathcal{P}(A)$ può essere suriettiva. Di conseguenza

$|A| < |\mathcal{P}(A)|$

**Dimostrazione.** Per assurdo. Posto $B = \{x \in A |\ x \notin f(x)\} \subset A$ esiste $y \in A$ tale che $f(y) = B$. Contraddizione**.**

**Aeterni Patris (1879)**



Leone XIII

"…. per studiarle [le scienze fisiche] con frutto e per accrescerle non bastano la sola osservazione dei fatti e la sola considerazione della natura, ma quando i fatti siano certi è necessario sollevarsi più alto e operare con solerzia per conoscere la natura della cose, per investigarne le leggi a cui obbediscono ed i principi dai quali nascono il loro ordine, l'unità nella varietà e la mutua affinità nella diversità".

- Infinito attuale $\neq$ Infinito Assoluto

# L’ipotesi del continuo

La cardinalità $2^{\aleph_0}$ di $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ coincide con la cardinalità $\mathsf{C}$ del continuo:

$$|\mathcal{P}(\mathbf{N})| = 2^{\aleph_0} = \mathsf{C}$$

La gerarchia degli **$\aleph$:** $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots$

Ipotesi del continuo: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$